4 Desigualdades

Ten en cuenta

Los signos $>$ o $<$ determinan dos sentidos opuestos o contrarios en las desigualdades, según sea el primer miembro mayor o menor que el segundo.

Una **desigualdad** es una comparación entre dos cantidades en la que se utilizan los símbolos $>$ o $<$.

Teniendo en cuenta que el conjunto de los números reales es ordenado, se establecen las siguientes relaciones:

$$a < b \text{ sí y sólo sí } a - b < 0$$

$$a > b \text{ sí y sólo sí } a - b > 0$$

$$a = b \text{ sí y sólo sí } a - b = 0$$

y se comprueban las siguientes propiedades:

Para $a, b, c \in \mathbb{R}$:

$$\text{Si } a > b, \text{ entonces } a \pm c > b \pm c$$

$$\text{Si } a < b, \text{ entonces } ac < bc, \text{ si } c > 0, \text{ y } ac > bc, \text{ si } c < 0$$

Ejemplo 15 Si $a = -4$ y $b = 8$, se verifica que $-4 - 8 < 0$, entonces $-4 < 8$.

Si $c = -3$, entonces: $-4 + (-3) < 8 + (-3)$

$$-7 < 5$$

Si $c = 3$, entonces: $(-4)(3) < (8)(3)$

$$-12 < 24$$

Si $c = -3$, entonces: $(-4)(-3) > (8)(-3)$

$$12 > -24$$

Actividad resuelta

Ejercitación

11. Si $-14 > -16$, determina la desigualdad que se obtiene en cada caso:

a) Se adiciona 5 a ambos lados de la desigualdad.

b) Se multiplican ambos lados de la desigualdad por 8.

c) Se multiplican ambos lados de la desigualdad por $-\frac{1}{2}$.

Solución:

a) Se adiciona 5 a ambos lados de la desigualdad y se obtiene:

$$-14 + 5 > -16 + 5$$

$$-9 > -11$$

b) Al multiplicar ambos lados de la desigualdad por 8, se tiene que:

$$(-14)(8) > (-16)(8)$$

$$-112 > -128$$

c) Al multiplicar ambos lados de la desigualdad por $-\frac{1}{2}$, esta cambia de sentido:

$$(-14)\left(-\frac{1}{2}\right) < (-16)\left(-\frac{1}{2}\right)$$

$$7 < 8$$

Actividades propuestas

Ejercitación

12. Si $0 < m < n$, asigna valores a m y n para verificar las desigualdades.

a) $(m + n)^2 > m^2 + n^2$

b) $(m - n)^2 < (m + n)^2$

c) $n - m > 0$

Razonamiento

13. Si $a > b$, indica si son verdaderas (V) o falsas (F) las desigualdades.

a) $1 - b > 1 - a + b$

b) $a > -ab > b$

c) $-a + 0 < -b + 0$

• Más actividades en la página 24, numerales 43 y 44

6 Inecuaciones lineales y cuadráticas

Ten en cuenta

Resolver una inecuación consiste en encontrar el conjunto de valores de la incógnita que satisfacen la desigualdad, aplicando las propiedades de las desigualdades y procesos algebraicos empleados en el despeje de ecuaciones.

Se define **inecuación** como una desigualdad que contiene una o varias incógnitas. Además de los símbolos $>$ y $<$, se emplean $\geq$ y $\leq$.

Para a, b, $c \in \mathbb{R}$ y una variable real x:

Una **inecuación lineal** es una desigualdad de alguna de las formas:

$$ax + b < c \qquad ax + b > c \qquad ax + b \leq c \qquad ax + b \geq c$$

Una **inecuación cuadrática** es toda inecuación en la que uno de sus miembros se puede llevar a una expresión de la forma $ax^2 + bx + c$ y el otro miembro es cero.

Ejemplo 18 En la tabla 1.5, se presentan ejemplos de inecuaciones lineales y cuadráticas:

Inecuaciones lineales	Inecuaciones cuadráticas
$2x + 5 > 9$ $5x - 3 < 8x - 2$ $2x - 3(x + 1) \geq 3$	$2x^2 + 2x + 1 < 0$ $2x^2 + 8 > 0$ $3x^2 \leq 27$

Tabla 1.5

Actividad resuelta

Ejercitación

17. Resuelve las siguientes inecuaciones:

a) $2x - 3(x + 1) \geq 3$

b) $x^2 - 5x + 6 \geq 0$

Solución:

a) $2x - 3(x + 1) \geq 3$

$2x - 3x - 3 \geq 3$ ← Se eliminan paréntesis.

$-x - 3 \geq 3$ ← Se reducen términos semejantes.

$-x - 3 + 3 \geq 3 + 3$ ← Se adiciona 3 en ambos lados.

$-x \geq 6$ ← Se reducen términos semejantes.

$x \leq -6$ ← Se multiplica a ambos lados por -1.

Los valores que satisfacen la inecuación dada son todos los números reales menores o iguales que -6, es decir el intervalo $(-\infty, -6]$. Gráficamente:

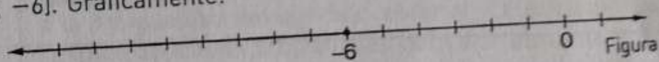


Figura 1.12

b) $x^2 - 5x + 6 \geq 0$

$(x - 3)(x - 2) \geq 0$ ← Se factoriza el trinomio

Si $P(x) \cdot Q(x) \geq 0$, entonces $P(x) \geq 0$ y $Q(x) \geq 0$ o $P(x) \leq 0$ y $Q(x) \leq 0$. Aplicando esta propiedad, se tiene:

$x - 3 \geq 0$ y $x - 2 \geq 0$ o $x - 3 \leq 0$ y $x - 2 \leq 0$

$x \geq 3$ y $x \geq 2$ o $x \leq 3$ y $x \leq 2$

Con lo cual se tienen los respectivos intervalos: $[3, \infty)$, $[2, \infty)$, $(-\infty, 3]$ y $(-\infty, 2]$.

Por lo tanto, la solución resulta de realizar la operación: $[3, \infty) \cap [2, \infty) \cup (-\infty, 3] \cap (-\infty, 2]$.

Luego, la solución es $[3, \infty) \cup (-\infty, 2]$.

Actividades propuestas

Ejercitación

18. Resuelve las inecuaciones dadas.

a) $-3x + 6 + 2(x + 1) < x + 6$

b) $3(-5x - 4) + 49x \leq 18x + 6 - 28(1 - 2x)$

c) $x^2 + 3x - 4 < 0$

d) $4x^2 + 2x \geq 2x + 16$

e) $\dfrac{5}{3}x + 4 < 8x - 1$

Razonamiento

19. Indica cuál afirmación es verdadera.

a) Al adicionar en ambos miembros de una desigualdad un mismo número, la desigualdad se conserva.

b) Al multiplicar en ambos miembros de una desigualdad por un número real menor que cero, no cambia el sentido de la desigualdad.

Dado un número real x, su **valor absoluto** $|x|$ coincide con él si es positivo y con su opuesto si es negativo.

$$|x| = \begin{cases} x, \text{ si } x \geq 0 \\ -x, \text{ si } x < 0 \end{cases}$$

Ten en cuenta

El valor absoluto de un número real x, es la distancia que hay entre él y el origen o cero. Como no hay distancias negativas, el valor absoluto es positivo.

■ **Propiedades del valor absoluto**

- El valor absoluto de un número real es siempre positivo. Es decir:

  $|x| \geq 0$, para cualquier x: $\quad |-4| = 4 \quad |-12{,}3| = 12{,}3 \quad |5{,}663| = 5{,}663$

- El valor absoluto del producto es igual al producto de los valores absolutos de los factores. Matemáticamente:

  $|x \cdot y| = |x| \cdot |y|$ para cualesquiera x y y: $\quad |3 \cdot (-4)| = |-12| = 12$

  $|3| \cdot |-4| = 3 \cdot 4 = 12$

- El valor absoluto de la suma de dos números es siempre menor o igual que la suma de los valores absolutos de dichos números. Es decir:

  $|x + y| \leq |x| + |y|$ para cualesquiera x y y: $\quad \left.\begin{array}{l} |3+(-5)| = |-2| = 2 \\ |3| + |-5| = 3 + 5 = 8 \end{array}\right\} \Rightarrow 2 < 8$

[www.redes-sm.net

Complementa tus conocimientos en nuestro sitio web.

Ejemplo 19 Resuelve la ecuación $|2x - 3| = 4$ aplicando la definición de valor absoluto.

El valor absoluto de un número es igual a 4 si y sólo si el número es 4 o -4, por lo tanto:

$$2x - 3 = 4 \text{ o } 2x - 3 = -4$$

Despejando x en cada ecuación, se tiene:

$$x = \frac{7}{2} \text{ o } x = -\frac{1}{2}$$

El conjunto solución de la ecuación $|2x - 3| = 4$ es $\left\{-\frac{1}{2}, \frac{7}{2}\right\}$.

Actividad resuelta

Razonamiento

20. Desarrolla la expresión $|x - 2| - 2x$ aplicando la definición de valor absoluto.

Solución:

Por definición de valor absoluto, se tiene:

$$|x - 2| - 2x = \begin{cases} -(x-2) - 2x, \text{ si } x - 2 < 0 \\ x - 2 - 2x, \text{ si } x - 2 \geq 0 \end{cases} = \begin{cases} -3x + 2, \text{ si } x < 2 \\ -x - 2, \text{ si } x \geq 2 \end{cases}$$

Actividades propuestas

Ejercitación

21. Halla el conjunto solución de las ecuaciones dadas.

a) $|2x - 3| = 7$

b) $|x + 8| = 0$

c) $|4x - 3| = -9$

d) $|5 - 3x| = 7$

Ejercitación

22. Calcula los valores de x que cumplen:

a) $3x - \frac{1}{2} - 4|x - 3| = 5$

b) $2x + 1 + |2x - 6| = 4$

• Más actividades en la página 28, numeral 61.

8. Inecuaciones con valor absoluto

Para resolver **inecuaciones con valor absoluto** se deben aplicar las siguientes propiedades del valor absoluto:

Para todo x y $y \in \mathbb{R}$:

- $|x| \leq a$ si y sólo si $-a \leq x \leq a$, para $a > 0$
- $|x| \geq a$ si y sólo si $x \leq -a$ o $x \geq a$, para $a \in \mathbb{R}$
- $|x| < |y|$ si y sólo si $x^2 < y^2$

En la red

ENCUENTRA EJEMPLOS RESUELTOS DE INECUACIONES CON VALOR ABSOLUTO Y SUS PROPIEDADES EN LA PÁGINA WEB:
www.e-sm.net/11mt04

Ejemplo 20 Resuelve la inecuación $|6x + 5| \leq 2$.

Aplicando las propiedades del valor absoluto y de las desigualdades, se tiene que:

$$-2 \leq 6x + 5 \leq 2$$

$$-2 - 5 \leq 6x + 5 - 5 \leq 2 - 5$$

$$-7 \leq 6x \leq -3$$

$$-\frac{7}{6} \leq \frac{6}{6}x \leq -\frac{3}{6}$$

$$-\frac{7}{6} \leq x \leq -\frac{1}{2}$$

Entonces, el conjunto solución es $\left[-\frac{7}{6}, -\frac{1}{2}\right]$.

Gráficamente:

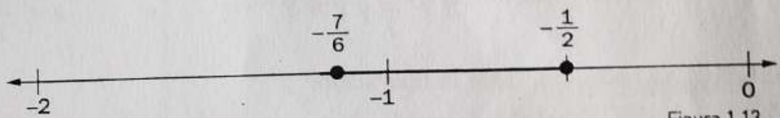


Figura 1.13

Sabías que...

Dos inecuaciones son equivalentes si tienen el mismo conjunto de soluciones.

Ejemplo 21 Resuelve la desigualdad $|4x + 2| > 14$ y determina si es equivalente a la desigualdad del ejercicio anterior. La solución de la inecuación $|4x + 2| > 14$, se halla aplicando propiedades del valor absoluto y de las desigualdades:

$$4x + 2 < -14 \quad \text{o} \quad 4x + 2 > 14$$

$$4x + 2 - 2 < -14 - 2 \quad \text{o} \quad 4x + 2 - 2 > 14 - 2$$

$$4x < -16 \quad \text{o} \quad 4x > 12$$

$$\frac{4}{4}x < -\frac{16}{4} \quad \text{o} \quad \frac{4}{4}x > \frac{12}{4}$$

$$x < -4 \quad \text{o} \quad x > 3$$

Esto significa que todos los x menores que -4 junto con los x mayores que 3, son solución de la inecuación $|4x + 2| > 14$.

Por lo tanto, el conjunto solución de la inecuación es $(-\infty, -4) \cup (3, \infty)$.

Gráficamente, se tiene:

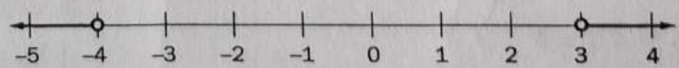


Figura 1.14

En la red

PRACTICA LA RESOLUCIÓN DE DESIGUALDADES CON VALOR ABSOLUTO EN LA PÁGINA WEB:
www.e-sm.net/11mt05

Como el conjunto solución de $|4x + 2| > 14$ es distinto al conjunto solución de $|6x + 5| \leq 2$, las desigualdades no son equivalentes.

Actividad resuelta

Ejercitación

23. Resuelve la inecuación $\dfrac{|x-1|}{|x-3|} < 2$.

Solución:

Se multiplica a ambos lados de la desigualdad por $|x-3|$ con $x \neq 3$:

$$\frac{|x-1|}{|x-3|} \cdot |x-3| < 2 \cdot |x-3|$$

Simplificando se obtiene:

$$|x-1| < 2 \cdot |x-3|$$

Al aplicar la propiedad del valor absoluto y los cuadrados, se tiene que:

$$(x-1)^2 < 4(x-3)^2$$

Se desarrollan los cuadrados y se obtiene una inecuación cuadrática:

$$x^2 - 2x + 1 < 4(x^2 - 6x + 9)$$
$$x^2 - 2x + 1 < 4x^2 - 24x + 36$$
$$0 < 4x^2 - 24x + 36 - x^2 + 2x - 1$$
$$0 < 3x^2 - 22x + 35$$

A continuación se factoriza el trinomio y se aplican propiedades del producto para hallar las soluciones de la inecuación:

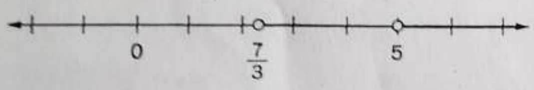
$$(3x-7)(x-5) > 0$$
$$(3x-7) > 0 \text{ y } (x-5) > 0 \quad \text{o} \quad (3x-7) < 0 \text{ y } (x-5) < 0$$
$$x > \frac{7}{3} \text{ y } x > 5 \quad \text{o} \quad x < \frac{7}{3} \text{ y } x < 5$$

La solución se halla mediante la operación:

$$\left(\frac{7}{3}, \infty\right) \cap (5, \infty) \cup \left(-\infty, \frac{7}{3}\right) \cap (-\infty, 5)$$

Gráficamente:

$\left(\frac{7}{3}, \infty\right) \cap (5, \infty)$



$\left(-\infty, \frac{7}{3}\right) \cap (-\infty, 5)$

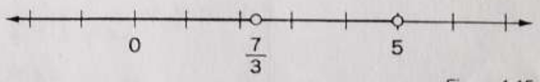


Figura 1.15

Por lo tanto, la solución de la inecuación es $\left(-\infty, \frac{7}{3}\right) \cup (5, \infty)$.

Actividades propuestas

Ejercitación

24. Determina la solución de las inecuaciones dadas.

a) $|2x-1| - 3 > 0$

b) $|x+5| > -\dfrac{3}{4}$

c) $|2x+9| < 0$

Ejercitación

25. Aplica las propiedades de valor absoluto y grafica la solución.

a) $|3x+5| \geq 2 \cdot |x|$

b) $3 \cdot |x+7| > |3x-1|$

c) $|x-2| < -1$

• Más actividades en las páginas 28 y 29, numerales 59 a 67.

	INSTITUTO TECNICO INTERNACIONAL IEDITI Calculo grado once Actividades de avances autónomos 16 a 27 de marzo	**Docente:** Edilberto Chavarro **Fecha:** **Nombre:**

ACTIVIDAD No. 1

A. Representa en la recta real los siguientes intervalos

1. (-7, -3] =

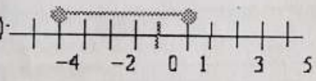
2. [-3, 5] =

3. [-3, 0] =

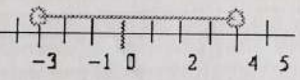
4. (-2, -1] =

5. (-2, 5/2] =

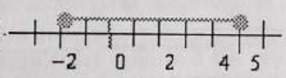
B. Usando la notación de conjunto escribir el siguiente intervalo representado en la recta real

1) 

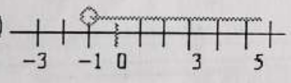
=

2) 

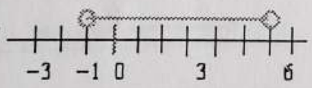
=

3) 

=

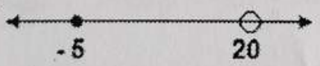
4) 

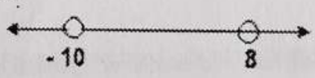
=

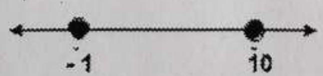
5) 

=

C. Observa las siguientes rectas numéricas e indica que conjunto de números reales representa, expresa este conjunto con un intervalo y escribe que clase de intervalo es:

1. 

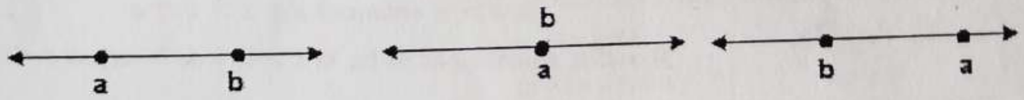
3. 

2. 

4. 

	INSTITUTO TECNICO INTERNACIONAL	**Docente:** Edilberto Chavarro
	IEDITI	**Fecha:**
	Calculo grado once	
	Actividades de avances autónomos	**Nombre:**
	16 a 27 de marzo	

D. 1. Como el conjunto de los reales es ordenado observa las siguientes gráficas y establece relaciones que indiquen su orden de ubicación entre ellos.



2. Elabora 2 ejemplos numéricos que verifiquen cada una de las relaciones anteriores.

De lo anterior podemos generalizar que:

Dados dos números reales a y b, entonces
$a < b$ si y solo si $a - b < 0$
$a = b$ si y solo si $a - b = 0$
$a > b$ si y solo si $a - b > 0$

DESIGUALDADES E INECUACIONES

¿Cómo surgen las desigualdades?

En la vida diaria nos encontramos con objetos o situaciones que podemos catalogar como iguales o diferentes entre sí. Por ejemplo, si vas a un supermercado a comprar, observas como se distribuyen los objetos en las despensas. Los que son considerados como iguales se colocan uno al lado del otro, como los aceites comestibles de una misma marca. Sin embargo, pudiera haber envases de la misma marca con aceites que químicamente no son "exactamente" iguales, debido a factores ambientales intervinientes desde el origen de la materia prima, su procesamiento, hasta su almacenamiento. Sin embargo, para facilitarnos la vida, los clasificamos como iguales ya que la mayoría de las variables importantes que definen al objeto (aceite) coinciden entre varios de ellos.

La igualdad absoluta, más allá del tiempo y del espacio, es una cualidad intrínseca del concepto de número.

En matemáticas, dos objetos matemáticos son considerados iguales si (y sólo si) son el mismo objeto. Por ejemplo, en la expresión $4x = 8$, los símbolos que están a ambos lados del signo igual (=) en esencia se refieren al mismo objeto, que en este caso es el número 8. Esto hace que el valor asignado a la variable "x" esté determinado y sea 2 únicamente, para que se cumpla la igualdad absoluta ($8 = 8$) luego de aplicar la propiedad de los números reales denominada multiplicación. La expresión anterior es un ejemplo de una ecuación sencilla, que ya es muy familiar. Esta igualdad absoluta se observa fácilmente cuando trabajamos con números enteros; cuando trabajamos con decimales podemos hacer aproximaciones para facilitar las operaciones matemáticas. En este último caso, se utiliza el símbolo ≈ de aproximación.

En matemáticas una desigualdad es una relación que existe entre dos cantidades o expresiones y, que nos indica que tienen diferentes